EXERCICE N1

Question 1

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left[x + \sqrt{x^2 - 4}\right]$

❑ Faux ■ **Vrai**	A	f est dérivable sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]2 ; +\infty[$
■ **Faux** ❑ Vrai	B	Pour tout x pour lequel f est dérivable, on a : $f'(x) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}\right]$
❑ Faux ■ **Vrai**	C	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
■ **Faux** ❑ Vrai	D	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Question 2

Soit f la fonction définie par : pour tout $x \in IR \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ $f(x) = \frac{x}{x - |x| + 1}$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

❑ Faux ■ **Vrai**	A	$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$
❑ Faux ■ **Vrai**	B	f est dérivable en $x = 0$
❑ Faux ■ **Vrai**	C	C_f admet la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ pour asymptote.
■ **Faux** ❑ Vrai	D	C_f admet la droite d'équation $x = 1$ pour asymptote.
■ **Faux** ❑ Vrai	E	L'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique.

Question 3

Pour tout θ et α pour lesquels les expressions suivantes sont définies, on a :

■ **Faux** ❑ Vrai	A	$\sin^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$
❑ Faux ■ **Vrai**	B	$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$
■ **Faux** ❑ Vrai	C	$\cos\theta \sin\alpha = \frac{1}{2}[\cos(\theta+\alpha) - \cos(\theta-\alpha)]$

EXERCICE N2

1. Interprétation graphique des limites :

   a) $\lim\limits_{-\infty} f = 0^+$; $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 4 = 0^+$; $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \frac{f(x)-2}{x+2} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \frac{f(x)-2}{x+2} = -3$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = 0$.

   b) f est dérivable sur $]-\infty, -2[$ et $[-2, +\infty[$.

2. $\forall x \geq 1$, on a : $f(x) = x - 4 + \frac{1}{x}$,

$$f(2{,}001) = f(2+0.001) \approx f(2) + f'(2) \times 0.001 \approx -\frac{3}{2} + \frac{3}{4} \times 0.001 = -1.49925$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}.$$

EXERCICE N3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-6x+8} & si\ x\leq 2\\ x-1-\dfrac{4}{x+2} & si\ x>2\end{cases}$.

1. Continuité de f en 2 : $f(2)=\sqrt{2^2-6\times 2+8}=0$.

$\lim\limits_{2^-} f=\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{x^2-6x+8}=0=f(2) \Rightarrow$ f est continue à gauche en 2.

$\lim\limits_{2^+} f=\lim\limits_{x\to 2^+} x-1-\dfrac{4}{x+2}=0=f(2) \Rightarrow$ f est continue à droite en 2.

Ainsi f est continue en 2.

2. * $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+8}}{x-2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$: Forme indéterminée.

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-6x+8}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+8}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)\sqrt{x^2-6x+8}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-4)}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\left(\frac{-2}{0^+}\right)=-\infty.$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à gauche en 2.

* (ζ_f) admet une demi – tangente verticale dirigée vers le haut à gauche du point de coordonnées (2, 0).

3. * $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-1-\frac{4}{x+2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\frac{x^2+x-6}{x+2}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+x-6}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+3)}{(x+2)}=\dfrac{5}{4}$.

$\Rightarrow$ f est dérivable à droite en 2 et on a : $f_d'(2)=\dfrac{5}{4}$.

* (ζ_f) admet une demi - tangente à droite en 2 ayant pour équation :

$$\begin{cases}y=f_d'(2)(x-2)+f(2)\\ x\geq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{5}{4}(x-2)\\ x\geq 2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{5}{4}x-\dfrac{5}{2}.\\ x\geq 2\end{cases}$$

4. (t_1) et (t_2) sont les demi tangentes respectives à gauche et à droite en 2 de (ζ_f).

Soit I le point de (t_1) d'ordonné 2 et J le point de (t_2) d'abscisse 3.

$(t_1): x = 2 ; y \geq 0 \Rightarrow I(2,2)$

$$(t_2):\begin{cases} y = \frac{5}{4}x - \frac{5}{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow J\left(3, \frac{5}{4}\right)$$

A(2, 0).

$$\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\ \frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

$$\cos \widehat{IAJ} = \frac{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}}{AI \times AJ} = \frac{\frac{5}{2}}{2\times\frac{\sqrt{41}}{4}} = \frac{5}{\sqrt{41}} = \frac{5\sqrt{41}}{41}.$$

5. a) Soit $a \in \left]2, +\infty\right[$ alors $f(a) = a - 1 - \frac{4}{a+2}$.

f est la restriction d'une fonction rationnelle dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, en particulier sur $\left]2, +\infty\right[$ et on a :

$f'(a) = 1 + \frac{4}{(a+2)^2}$, $\forall a \in \left]2, +\infty\right[$.

b) Soit $M(a, f(a))$ un point de (ζ_f) tel que $a > 2$ et la tangente à (ζ_f) en M soit parallèle à $\Delta : 10x - 9y - 1 = 0$.

Alors la tangente et la droite Δ ont même coefficient directeur.

Or $\Delta : y = \frac{10}{9}x - \frac{1}{9} \Rightarrow f'(a) = \frac{10}{9}$ pour tout $a > 2 \Rightarrow 1 + \frac{4}{(a+2)^2} = \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{4}{(a+2)^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow (a+2)^2 = 36$

$\Rightarrow a + 2 = 6$ ou $a + 2 = -6 \Rightarrow a = 4$ ou $a = -8$, or $a > 2 \Rightarrow a = 4$.

Ainsi il existe un point M de (ζ_f) d'abscisse 4 tel que tangente à (ζ_f) en M soit parallèle à $\Delta : 10x - 9y - 1 = 0$.

6. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-6x+8}+x-3 \, (+\infty-\infty)$: Forme indéterminée.

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-6x+8}+(x-3)\right)\left(\sqrt{x^2-6x+8}-(x-3)\right)}{\sqrt{x^2-6x+8}-(x-3)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+8-(x-3)^2}{\sqrt{x^2-6x+8}-(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-6x+8}-(x-3)} = \left(\frac{-1}{+\infty}\right) = 0.$$

$\Rightarrow (\zeta_f)$ admet au voisinage de $-\infty$, une asymptote d'équation $y=-x+3$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{4}{x+2}-(x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{4}{x+2} = 0$

$\Rightarrow D: y=x-1$ est une asymptote oblique à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.

c) $f(x)-(x-1) = -\dfrac{4}{x+2} < 0, \forall\, x > 2 \Rightarrow (\zeta_f)$ est située au dessous de $D: y=x-1$ sur $]2,+\infty[$.

EXERCICE N4

1. a) Soit A le point de coordonnées cartésiennes $(2\,;-2)$.

On pose (r, θ) les coordonnées polaires de A.

$$r = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]. \text{ Ainsi } A\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Soit B le point de coordonnées polaires $\left(2\sqrt{2}\,;\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

On pose (x, y) les coordonnées cartésiennes de B.

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \text{ et } y = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$\Rightarrow$ B(-2, -2).

c) A(2, -2) et B(-2, -2).

$OA = OB = 2\sqrt{2}$

$AB^2 = 16 = OA^2 + OB^2$

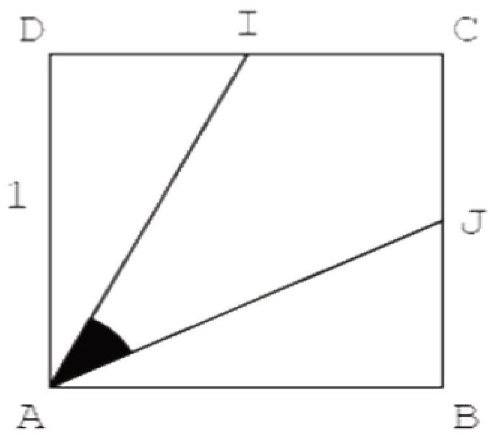
$\Rightarrow$ OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

2. a) $\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \dfrac{8+4\sqrt{3}}{16} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

b) $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2} \Rightarrow \cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$

Or $\dfrac{\pi}{12} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) > 0 \Rightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3.



$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\right) = \underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{0} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{BJ}}_{0} = AD\times BJ + DI\times AB = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$AI = AJ = \sqrt{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}}{AI\times AJ} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

1. a) Soit A le point de coordonnées cartésiennes $(2\ ;\ -2)$.

On pose (r, θ) les coordonnées polaires de A.

$r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]. \text{ Ainsi } A\left(2\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right).$$

b) Soit B le point de coordonnées polaires $\left(2\sqrt{2}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\right)$.

On pose (x, y) les coordonnées cartésiennes de B.

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2 \text{ et } y = 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$$

$\Rightarrow B(-2, -2)$.

c) $A(2, -2)$ et $B(-2, -2)$.

$OA = OB = 2\sqrt{2}$

$AB^2 = 16 = OA^2 + OB^2$